15. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

План:

1. Случайные величины и законы их распределения

2. Числовые характеристики случайных величин

Ключевые слова: *случайная величина, дискретная случайная величина, непрерывная случайная величина, ряд распределения, функция распределения функция плотности распределения, биномиальное, пуассоновское распределения, нормальное, равномерное и показательное законы распределения.*

Математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение, ковариация, коэффициент корреляции, моменты случайных величин, начальный момент $k-$го порядка, относительный момент $k-$го порядка, центральный момент $k-$го порядка, коэффициентом асимметрии, эксцесс (коэффициент эксцесса), начальный момент порядка k,l, относительный момент порядка k,l, - центральный момент порядка k,l.

Случайные события могут быть представлены через случайные величины. Понятия «случайная величина» расширяет область применения методов теория вероятностей в решении практических задач. Поэтому понятие «случайной величины» является одним из важнейших понятий теории вероятностей.

1.1. Определение случайной величины. Задание дискретной случайной величины

Определение 1. *Случайной величиной* называется функция $X = X(\omega)$, определенная на некотором множестве элементарных событий Ω.

Если Ω конечно, или счетно, то на функцию $X(\omega)$ не накладывается никаких ограничений, т.е. это может быть любая функция. Если Ω континиум, то $X(\omega)$ должна быть такой, что для любого события вида

$$A = \{\omega : X(\omega) \le x_0\},$$

где x_0 – любое число и $x_0 \in R^1$, могла быть определена его вероятность

$$p(A) = p\{X < x_0\}.$$

Следует отметить, что при изучении случайных величин и их свойств почти никогда не вспоминают об области их определения, т.е. о Ω.

Все встречающиеся в природе процессы и объекты, так или иначе, характеризуются численными значениями своих параметров. Причем по целому ряду причин эти значения должны рассматриваться нами как случайные. Поэтому понятие случайные величины имеет очень большую практическую значимость. Примеров случайных величин можно привести бесконечное количество – это и температура воздуха на завтра, и курс доллара на банковских торгах, и количество покупателей в магазине, и масса, даже стандартно упакованного, пакета некоторого продукта, и т.д. Фактически теория случайных величин составляет основную часть содержания теории вероятностей, и всю математическую статистику.

Определение 2. Конкретные значения, которые принимала случайная величина в ходе соответствующих экспериментов или наблюдений, называются *реализациями* данной случайной величины.

Например, X – курс доллара, установленный Центральном Банком Республики Узбекистан, это случайная величина. А, $x_1 = 8092{,}13$ курс на 12 сентября 2017 года, $x_1 = 8092{,}13$ курс на 17 апреля 2018 года - это реализации данной случайной величины.

Чаще всего случайная величина обозначаются заглавными латинскими буквами, например, X, Y, Z аргумент при этом обычно опускают. А их реализации – соответствующими строчными буквами – $x, y, z,$ и т.д.

Определение 3. Говорят, что случайная величина X *задана*, или задан ее *закон распределения*, если для любого множества $\mathrm{B} \subset R^1$ определена вероятность

$$p\left\{x \in \mathrm{B}\right\},$$

т.е. вероятность того, что при очередном эксперименте реализация x окажется лежащей в этом множестве.

Определение 4. Случайная величина X называется *дискретной*, если множество ее возможных значений конечно, или счетно.

Если случайная величина X имеет конечное количество возможных значений, то задать ее можно простым **перечислением** этих значений x_i, $i = \overline{1, n}$, и их соответствующих вероятностей

$$p\left\{X = x_i\right\} = p_i.$$

Очевидно, что последнее означает, что «p_i есть вероятность события $X = x_i$». Ясно, что события

$$X = x_1, \quad X = x_2, \quad \dots \quad, X = x_n \tag{*}$$

попарно несовместны, а их сумма есть событие достоверное (при каждом осуществлении опыта величина X принимает одно и только из своих значений), т.е. наступает одно и только одно из событий (*), т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} p\left\{X = x_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

(Эта единица как-то распределена между значениями случайной величины, отсюда и термин *«распределение»*.)

Такое перечисление обычно записывают в виде таблицы (табл. 1), которую называют *рядом распределения* данной случайной величины.

Таблица 1

x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

Итак, простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины X является ряд распределения данной случайной величины.

Пример 1. Пусть X – случайная величина числа очков при подбрасывании игральной кости. Это дискретная случайная величина, а ее ряд распределения имеет вид, указанный в таблицей 2.

Таблица 2

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Сложив вероятности, получим

$$\sum_{i=1}^{6} p_i = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1.$$

Пример 2. Для случайной величины X - числа бросаний монеты из примера 2.4 §3 при $n = 10$, $p = 1/2$ таблица распределения такова:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

Сложение вероятностей дает

$$\sum_{i=0}^{11} p_i = \frac{1}{1024} + \frac{10}{1024} + \frac{45}{1024} + \frac{120}{1024} + \frac{210}{1024} +$$
$$+ \frac{252}{1024} + \frac{210}{1024} + \frac{120}{1024} + \frac{45}{1024} + \frac{10}{1024} + \frac{1}{1024} = 1.$$

Если случайная величина имеет счетное количество возможных значений, то ее задают с помощью формульного описания этих значений и их вероятностей. При этом, формульные выражения зависят от i, т.е. номера значения

$$p\{X = x_i(i)\} = p_i(i), \quad i = \overline{1,\infty}.$$

При этом должно выполняться

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

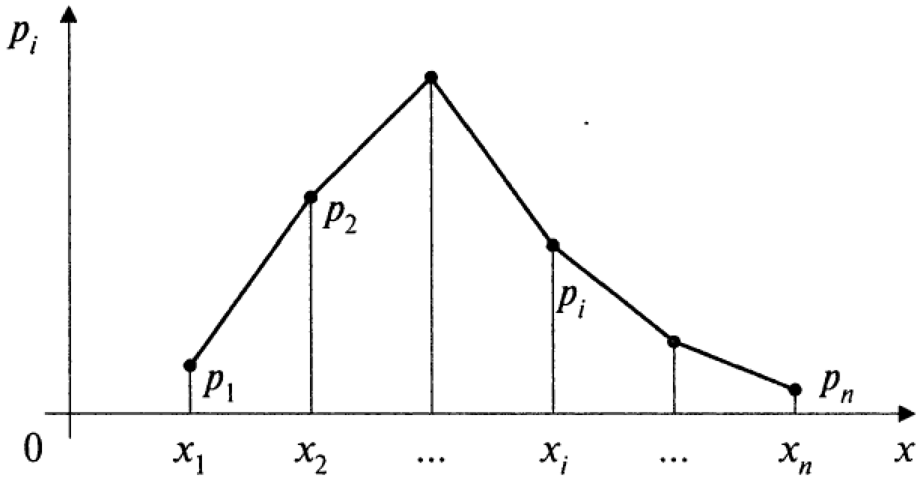

Рис. 1

Ряд распределения может быть изображен графически, если по оси абсцисс откладывать значения случайной величины, а по оси ординат - соответствующие их вероятности. Соединение полученных точек образует ломаную, называемую *многоугольником* или *полигоном* распределения вероятностей (рис. 1).

Пример 3. В лотерее разыгрываются: автомобиль стоимостью 5000 ден. ед., 4 телевизора стоимостью 250 ден. ед., 5 видеомагнитофонов стоимостью 200 ден. ед. Всего продается 1000 билетов по 7 ден. ед. Составить закон распределения чистого выигрыша, полученного участником лотереи, купившим один билет.

Решение

Возможные значения случайной величины X - чистого выигрыша на один билет - равны $0-7 = -7$ ден. ед. (если билет не выиграл), $200-7=193$, $250-7=243$, $5000-7=4993$ ден. ед. (если на билет выпал выигрыш соответственно видеомагнитофона, телевизора или автомобиля). Учитывая, что из 1000 билетов число невыигравших составляет 990, а указанных выигрышей соответственно 5, 4 и 1, и используя классическое определение вероятности, получим:

$$p\{X=-7\} = \frac{990}{1000} = 0{,}990; \qquad p\{X=193\} = \frac{5}{1000} = 0{,}005;$$

$$p\{X=243\}=\frac{4}{1000}=0,004; \qquad p\{X=4993\}=\frac{1}{1000}=0,001,$$

т.е. ряд распределения

x_i	-7	193	243	4993
p_i	0,990	0,005	0,004	0,001

и $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0,990+0,005+0,004+0,001=1.$

Пример 4. Вероятности того, что студент сдаст семестровый экзамен в сессию по дисциплинам А и Б, равны соответственно 0,7 и 0,9. Составить закон распределения числа семестровых экзаменов, которые сдаст студент.

Решение

Возможные значения случайной величины X - числа сданных экзаменов - 0, 1, 2.

Пусть A_i - событие, состоящее в том, что студент сдаст i-й экзамен $(i=1,2)$. Тогда вероятности того, что студент сдаст в сессию 0, 1, 2 экзамена, будут соответственно равны (считаем события A_1 и A_2 независимыми):

$$p\{X=0\}=p\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\right)=p\left(\overline{A_1}\right)p\left(\overline{A_2}\right)=(1-0,7)(1-0,9)=0,3\cdot 0,1=0,03;$$

$$p\{X=1\}=p\left(A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2\right)=p(A_1)\,p\left(\overline{A_2}\right)+p\left(\overline{A_1}\right)p(A_2)=$$
$$=0,7\cdot 0,1+0,3\cdot 0,9=0,34;$$

$$p\{X=2\}=p(A_1A_2)=p(A_1)\,p(A_2)=0,7\cdot 0,9=0,63.$$

Итак, ряд распределения

x_i	1	2	3
p_i	0,03	0,34	0,63

и $\sum_{i=1}^{3} p_i = 0,03+0,34+0,63=1.$

На рис. 2 полученный ряд распределения представлен графически в виде многоугольника (полигона) распределения вероятностей.

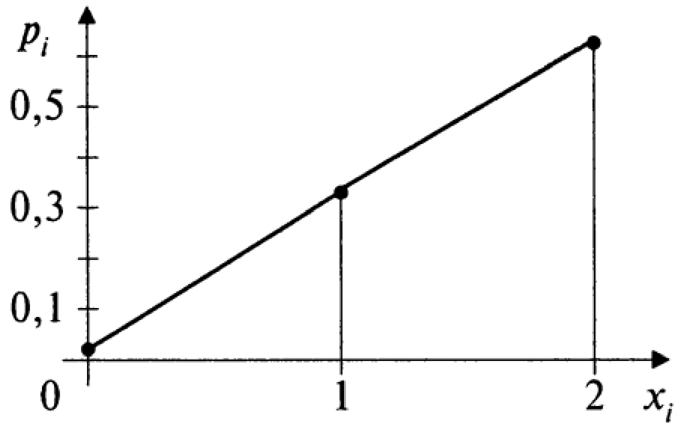

Рис. 2

Упражнения

1. Клиенты банка, не связанные друг с другом, не возвращают кредиты в срок с вероятностью 0,1. Составить закон распределения числа возвращенных в срок кредитов из 5 выданных.

2. Найти закон распределения числа пакетов трех акций, по которым владельцем будет получен доход, если вероятность получения дохода по каждому из них равна соответственно 0,5; 0,6; 0,7.

3. Контрольная работа состоит из трех вопросов. На каждый вопрос приведено 4 ответа, один из которых правильный. Составить закон распределения числа правильных ответов при простом угадывании.

4. В среднем по 10% договоров страховая компания выплачивает страховые суммы в связи с наступлением страхового случая. Составить закон распределения числа таких договоров среди наудачу выбранных четырех.

5. В билете три задачи. Вероятность правильного решения первой задачи равна 0,9, второй - 0,8, третьей - 0,7. Составить закон распределения числа правильно решенных задач в билете.

6. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,8 и уменьшается с каждым выстрелом на 0,1.Составить закон распределения числа попаданий в цель, если сделано три выстрела.

7. Произведено два выстрела в мишень. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,8, вторым - 0,7, Составить закон распределения числа попаданий в мишень. (Каждый стрелок делает по одному выстрелу).

8. Из пяти гвоздик две белые. Составить закон распределения и найти функцию распределения случайной величины, выражающей число белых гвоздик среди двух одновременно взятых.

9. Из 10 телевизоров на выставке 4 оказались фирмы «Сони». Наудачу для осмотра выбрано 3. Составить закон распределения числа телевизоров фирмы «Сони» среди 3 отобранных.

10. Среди 15 собранных агрегатов 6 нуждаются в дополнительной смазке. Составить закон распределения числа агрегатов, нуждающихся в дополнительной смазке, среди пяти наудачу отобранных из общего числа.

Пример 5. Пусть X - случайная величина числа бросаний монеты до первого выпадения герба. Ясно, что эта случайная величина имеет счетное количество возможных значений, и

$$p\{X=i\}=\frac{1}{2^i}, \quad i=\overline{1,\infty}.$$

Ряд распределения:

x_i	1	2	3	$\dots$	i	$\dots$
p_i	$1/2$	$1/2^2$	$1/2^3$	$\dots$	$1/2^i$	$\dots$

Ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i$ представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой $b_1=\frac{1}{2}$, а знаменатель $q=\frac{1}{2}$. Этот ряд сходится, его сумма $S=\frac{b_1}{1-q}=1$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{\infty}p_i=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i=1.$$

Следует отметить, что реальных примеров счетных случайных величин не очень много.

Пример 6. Изделия испытывают на прочность при работе в перегрузочных режимах. Вероятность для каждого изделия пройти испытание равна 5/6 и не зависит от исходов испытаний других изделий. Испытания заканчиваются сразу же после того, как появится первое изделие, не выдержавшее проверку на прочность. Найти ряд распределения случайной величины X - числа производимых испытаний.

Решение

Вероятность для каждого изделия пройти испытание равна $p=5/6$; вероятность того, что изделие не пройдет испытание, равна $q=1-p=1/6$. Испытания заканчиваются на k-м изделии (k = 1, 2,3, ...), если первые $k-1$ изделий пройдут испытания, а k-е изделие не выдержит испытания.

Случайная величина X - число проводимых испытаний, ее возможные значения: 1, 2, 3, ... , k, ... (Теоретически число испытаний может быть бесконечно большим). Вероятности возможных значений величины X найдем по теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$p\{X=k\}=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}\right), \quad (k=1,2,3,\ldots).$$

Рассматриваемая случайная величина X имеет следующий ряд распределения:

x_i	1	2	3	…	k	…
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6^2}$	$\frac{5^2}{6^3}$	…	$\frac{5^{k-1}}{6^k}$	…

Особенность рассматриваемой случайной величины X состоит в том, что теоретически последовательность ее возможных значений является неограниченной. Число производимых испытаний может быть бесконечно большим, однако вероятность того, что это произойдет, стремится к нулю:

$$\lim_{k\to\infty} p\{X=k\}=\frac{5^{k-1}}{6^k}=0.$$

Убедимся в том, что полученная последовательность вероятностей характеризует закон распределения X, т. е. что $\sum_{i=1}^{\infty} p_i=1$.

Найдем

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i=\frac{1}{6}+\frac{5}{6^2}+\frac{5^2}{6^3}+\ldots+\frac{5^{k-1}}{6^k}+\ldots=\frac{1}{6}\left(1+\frac{5}{6}+\frac{5^2}{6^2}+\ldots+\frac{5^{k-1}}{6^{k-1}}+\ldots\right)=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}.$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой $b_1=1$, а знаменатель $q=\frac{5}{6}$. Этот ряд сходится, его сумма $S=\frac{b_1}{1-q}=6$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i=\frac{1}{6}S=\frac{1}{6}\cdot 6=1.$$

Закон распределения полностью характеризует случайную величину, указывая возможные значения и вероятности, с которыми эти значения появляются в результате испытаний. Для первого из рассмотренных законов распределений (пример 1) все значения равновероятны (пример 1), а для второго (пример 2) значения резко различаются по своим вероятностям: значение 10 имеет вероятность, в 252 раза меньшую, чем значение 5. Это, в частности, означает, что случайная величина принимает значение 5 в 252 раза чаще, чем 10 и т.д.

Упражнения

1. В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз размером 1 тыс. д.е. Составить закон распределения случайной величины-размера выигрыша при пяти сделанных покупках.

2. Вероятность поражения вирусным заболеванием куста земляники равна 0,2. Составить закон распределения числа кустов земляники, зараженных вирусом, из четырех посаженных кустов.

3. Стрелок ведет стрельбу по цели с вероятностью попадания при каждом выстреле 0,2. За каждое попадание он получает 5 очков, а в случае промаха очков ему не начисляют. Составить закон распределения числа очков, полученных стрелком за 3 выстрела.

4. Возможные значения случайной величины таковы: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$. Известны вероятности первых двух возможных значений: $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}15$. Найти вероятность x_3.

5. Игральная кость брошена 3 раза. Написать закон распределения числа появлений шестерки.

6. Составить закон распределения вероятностей числа появлений события A в трех независимых испытаниях, если вероятность появления события в каждом испытании равна 0,6.

7. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет в пяти веретенах.

8. Найти среднее число опечаток на странице рукописи, если вероятность того, что страница рукописи содержит хотя бы одну опечатку, равна 0,95. Предполагается, что число опечаток распределено по закону Пуассона.

Указание: задача сводится к отысканию параметра λ из уравнения $e^{-\lambda} = 5$.

9. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение одной минуты абонент позвонит на коммутатор, равна 0,02. Какое из двух событий вероятнее: в течение одной минуты позвонит 3 абонента; позвонит 4 абонента?

10. Рукопись объемом в 1000 страниц машинописного текста содержит 1000 опечаток. Найти вероятность того, что наудачу взятая страница содержит: а) хотя бы одну опечатку; б) ровно 2 опечатки; в) не менее двух опечаток. Предполагается, что число опечаток распределено по закону Пуассона.

Ниже ознакомимся с двумя важными примерами дискретных случайных величин. Соответствующие им законы носят названия: *биномиальное распределение, пуассоновское распределение.*

Определение 6. Распределение случайной величины X, равной количеству наступлений события A в схеме Бернулли из n испытаний, называется *биномиальным распределением.*

В этом распределении значению $k \in \{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n\}$ случайной величины X соответствует вероятность $P_n(k) = C_n^k\, p^k q^{n-k}$, где p – вероятность наступления события A в одном испытании, $q = 1 - p$.

Комментарий к определению 6

Биномиальное распределение дискретно (т. е. является распределением дискретной случайной величины X).

Биномиальное распределение широко используется в теории и практике статистического контроля продукции, при описании функционирования систем массового обслуживания, в теории стрельбы и в других областях.

Примером биномиального распределения служит последняя таблица из примера 2. Здесь $n = 10,\ \ p = 1/2$.

Определение 7. Распределение случайной величины X, принимающей значения $k \in \{0,\ 1,\ 2,\ ...\}$ с вероятностями $\dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где $\lambda > 0$ - некоторый параметр, называется *пуассоновским распределением* или *распределением Пуассона*.

Комментарий к определению 7

Пуассоновское распределение дискретно, т. е. является распределением дискретной случайной величины.

По пуассоновскому распределены, например, число рождения четверней, число сбоев на автоматической линии, число отказов сложной системы в «нормальном режиме», число «требований на обслуживание», поступивших в единицу времени в системах массового обслуживания и др.

1.2. Непрерывная случайная величина. Функция распределения

Определение 5. Случайная величина называется *непрерывной,* если область ее возможных значений имеет более чем счетную мощность, т.е. включает, хотя бы один непрерывный интервал числовой оси.

На практике, как правило, встречаются непрерывные случайные величины. Непрерывными считают даже денежные суммы, человеческие ресурсы, и т.д. Тем более таковыми являются различные физические величины, или относительные экономические показатели, и т.д.

Ясно, что задать непрерывную случайную величину **простым перечислением ее значений и их вероятностей** невозможно.

Отметим, что если при рассмотрении дискретных случайных величин мы могли ограничиться событиями, представляющимися в виде суммы конечного или счетного множества элементарных событий $X = x_i$, то при переходе к непрерывным случайным величинам нам следует, прежде всего, расширить класс событий. В необходимости такого расширения можно убедиться на примере. Пусть с испытательной целью определяется полное время работы электрической лампы; для этого выпущенную заводом лампу эксплуатируют без перерыва до выхода ее из строя. Результатом такого испытания является величина X – срок службы лампы. Очевидно, эта величина является случайной – предсказать заранее ее значение невозможно. Элементарным событием в данном примере будет любое событие вида $X = a$, где a - неотрицательное число. Однако в отличие от дискретного случая каждое отдельно взятое элементарное событие не представляет теперь большого интереса. Действительно, возможных значений для X существует несчетное множество, между тем в любой серии испытаний мы имеем дело всегда с конечным числом ламп. Поэтому ясно, что данное фиксированное значение a в серии испытаний, как правило, не будет встречаться вообще или же будет наблюдаться чрезвычайно редко. Другими словами, вероятность события $X = a$, будет равна нулю.

В то же время события, выражаемые при помощи неравенств скажем, $X < 1000$ (лампа перегорела, не прослужив 1000 часов), представляются значительно более важными. Вероятности таких событий дают существенную информацию о распределении значений величины X и тем самым – о качестве ламп. Разумеется, вслед за событиями такого рода мы должны привлечь к рассмотрению и их комбинации, получаемые при помощи конечного или счетного числа операций сложения, умножения и перехода к противоположному событию. В первую очередь, с помощью такого рода событий можно ввести понятия распределения непрерывной случайной величины.

Оказывается, что любое множество числовой оси можно представить в виде не более чем счетного объединения непересекающихся интервалов вида

$$[a;\, b],\ (a;\, b],\ [a;\, b),\ (a;\, b),$$

или их дополнений. Такие интервалы называют *простыми множествами*. Поэтому достаточно определить вероятность попадания реализации некоторой случайной величины в любой такой интервал, и тогда, на основании теоремы сложения вероятностей, эта случайная величина будет задана. Рассмотрим, как это можно сделать.

Определение 8. *Функцией распределения* случайной величины X называется такая функция $F(x)$, что для любого $x \in R^1$ выполняется

$$F(x) = p\{X \le x\}.$$

Покажем, что с помощью функции распределения можно определить вероятность попадания реализации случайной величины в любое простое множество:

1) для $(a;\ b]$ это почти очевидно, так как

$p\{X \le b\} = p\{X \le a\} + p\{a < X \le b\}$ или $p\{a < X \le b\} = p\{X \le b\} - p\{X \le a\}$, тогда

$$p\{a < X \le b\} = F(b) - F(a);$$

2) для $[a;\ b]$. Пусть x_i – некоторая числовая последовательность, стремящаяся к a слева, т.е. это последовательность чисел меньших a, и таких что

$$\lim_{i \to \infty} x_i = a,$$

но тогда и для последовательности интервалов справедливо

$$(x_i,\ b] \to [a;\ b],$$

а тем самым

$$p\{a < X \le b\} = F(b) - \lim_{i \to \infty} F(x_i)$$

если только соответствующий предел слева функции $F(x)$ существует. Но для большинства реальных случайных величин это выполняется;

3) аналогично и для $[a;\ b)$, $(a;\ b)$.

Таким образом, функция распределения полностью задает любую случайную величину, в том числе и непрерывную.

Для дискретной случайной величины, имеющей ряд распределения

x_i	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

ее функция распределения имеет кусочно-постоянный, ступенчатый вид.

Пример 7. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	-2	0	3	7

p_i	0,3	0,1	0,5	0,1

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить график этой функции.

Решение

1) На промежутке $-\infty < x \le -2$ случайная величина X не принимает ни одного значения, меньшего числа -2, поэтому

$$F(x) = F(-2) = p\{X < -2\} = 0.$$

2) На промежутке $-2 < x \le 0$ величина X принимает одно значение $X = 0$, функция распределения $F(x) = F(0) = p\{X < 0\}$. Вероятность того, что X меньше 0, равна 0,3. На рассматриваемом промежутке

$$F(x) = F(0) = p\{X < 0\} = 0,3.$$

3) На промежутке $0 < x \le 3$ случайная величина X принимает одно значение $X = 3$, функция распределения $F(x) = F(3) = p\{X < 3\}$. При $X < 3$ случайная величина X может принять или значение - 2 с вероятностью 0,3, или же значение 0 с вероятностью 0,1, поэтому, одно из этих значений, безразлично какое, X может принять (по теореме сложения вероятностей несовместных событий) с вероятностью $0,3 + 0,1 = 0,4$. Таким образом,

$$F(x) = F(3) = p\{X < 3\} = p\{X = -2\} + p\{X = 0\} = 0,3 + 0,1 = 0,4.$$

4) На промежутке $3 < x \le 7$ случайная величина X принимает одно значение $X = 7$, функция распределения $F(x) = F(7) = p\{X < 7\}$. При $X < 7$ величина X может принять или значение - 2 с вероятностью 0,3, или значение 0 с вероятностью 0,1, или значение 3 с вероятностью 0,5, поэтому одно из этих значений, безразлично какое, X может принять (по теореме сложения вероятностей несовместных событий) с вероятностью $0,3 + 0,1 + 0,5 = 0,9$. Таким образом, на рассматриваемом промежутке

$$F(x) = F(3) = p\{X < 7\} = p\{X = -2\} + p\{X = 3\} + p\{X = 0\} =$$
$$= 0,3 + 0,1 + 0,5 = 0,9.$$

5) На промежутке $7 < x < \infty$ величина X может принять любое из всех своих возможных значений, поэтому функция распределения

$$F(x) = p\{X < \infty\} = 1.$$

Итак, рассматриваемая случайная величина X на всей числовой оси характеризуется следующей функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le -2,\\ 0,3 & при \quad -2<x\le 0,\\ 0,4 & при \quad 0<x\le 3,\\ 0,9 & при \quad 3<x\le 7,\\ 1 & при \quad x>7.\end{cases}$$

График этой функции приведен на рис. 3.

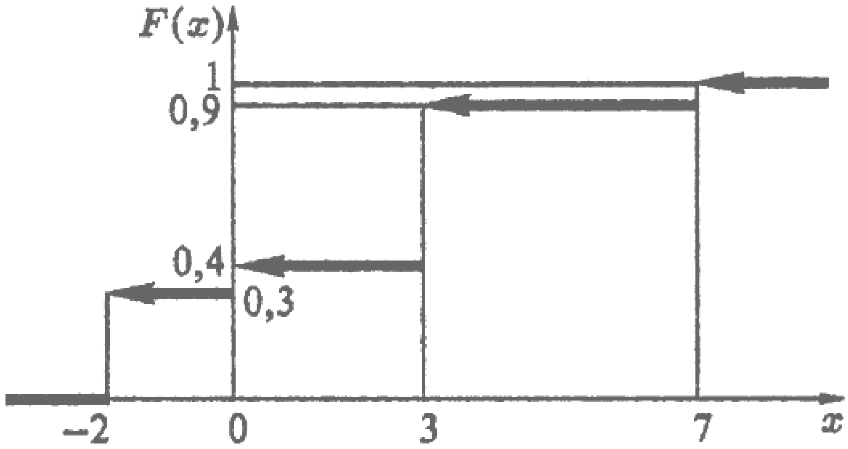

Рис. 3

Заметим, что при подходе слева к точкам разрыва функция сохраняет свое значение (про такую функцию говорят, что она непрерывна слева).

Этот пример позволяет прийти к утверждению, что функция распределения любой дискретной случайной величины есть разрывная ступенчатая функция, скачки которой происходят в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины и равны вероятностям этих значений. Сумма всех скачков функции $F(x)$ равна 1.

Пример 8. Дискретная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 2,\\ 0,5 & при \quad 2<x\le 4,\\ 0,7 & при \quad 4<x\le 8,\\ 1 & при \quad x>8.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что X примет значение не меньшее 4 и меньшее 8.

Решение

Искомую вероятность $p\{4\le X<8\}$ найдем по формуле

$$p\{4\le X<8\}=F(8)-F(4)=0,7-0,5=0,2.$$

Упражнения

1. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить график этой функции.

2. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	-1	3	6	7	8
p_i	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1

Чему равна вероятность $p\{3 < X \le 7\}$.

3. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	1	3	5	7	9
p_i	0,25	a	b	c	0,15

и вероятность $p\{1 \le X \le 5\} = 0,6$. Тогда чему равны значения a, b и c.

4. Для дискретной случайной величины X ,

x_i	2	3	4	5
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4

функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 2, \\ 0,25 & \text{при } 2 < x \le 3, \\ 0,40 & \text{при } 3 < x \le 4, \\ 0,75 & \text{при } 4 < x \le 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Найти значения вероятностей p_1, p_2, p_3 и p_4.

Для так называемой *равномерно распределенной*, на отрезке $[a; b] \subset R^1$ случайной величины, функция распределения задается следующим кусочно-аналитическим выражением

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a \le x \le b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Определение 9. Случайная величина называется *абсолютно непрерывной*, если ее функция распределения непрерывна на всей числовой оси.

Множеством возможных значений абсолютно непрерывной случайной величины, обычно является один единственный непрерывный интервал числовой оси, быть может, с бесконечными границами. Большинство встречающихся на практике случайные величины являются абсолютно непрерывными, поэтому в дальнейшем, говоря «непрерывная случайная величина», мы будем подразумевать абсолютно непрерывную случайную величину.

Достаточно очевидны следующие важные свойства функции распределения.

***Свойства функции распределения*:**

1) $0 \le F(x) \le 1$, для любого $x \in R^1$;

2) $F(x)$ – неубывающая функция;

3) $F(x) \to 0$, при $x \to -\infty$; $F(x) \to 1$, при $x \to +\infty$.

1.3. Функция плотности распределения случайной величины

Следующее понятие является чрезвычайно важным.

Определение 10. Функция $f(x)$ называется *функцией плотности распределения* случайной величины X (или просто *плотностью*), если для любого $(a, b] \subset R^1$ выполняется

$$p\{x \in (a, b]\} = \int_a^b f(x)dx$$

Ясно, что плотность тоже полностью задает случайную величину. Из сказанного выше следует

$$\int_a^b f(x)dx = p\{x \in (a, b]\} = F(b) - F(a).$$

т.е. функция распределения является первообразной для плотности, т.е.

$$F'(x) = f(x), \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi.$$

Таким образом, зная плотность всегда можно найти функцию распределения, и наоборот. Однако, на практике для задания случайной величины почти всегда используется плотность. Это связано со следующим обстоятельством.

Вспомним геометрический смысл определенного интеграла (рис. 4), а именно, что он численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной соответствующим участком графика функции на интервале интегрирования и самим этим интервалом.

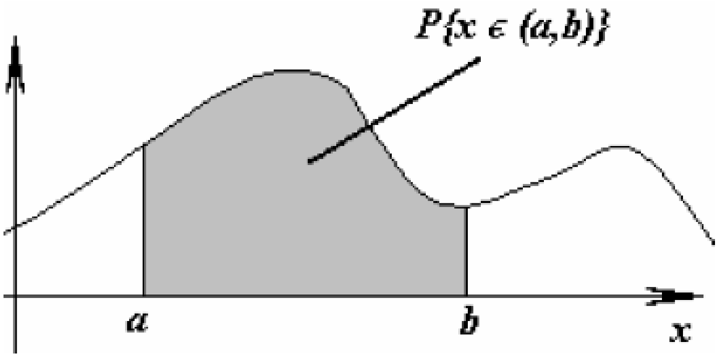

Рис. 4

Таким образом, на тех участках числовой оси, где больше значения функции плотности, там и больше площадь под ее графиком, а тем самым и вероятность появления реализаций данной случайной величины. Поэтому график плотности весьма хорошо иллюстрирует закон распределения данной случайной величины. Этого нельзя сказать о графике функции распределения.

Пример 9. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 2, \\ (x-2)^2 & \text{при } 2<x\le 3, \\ 1 & \text{при } x>3. \end{cases}$$

Найти:

а) функцию плотности распределения $f(x)$;

б) графики функций $F(x)$ и $f(x)$;

в) по известной функции $F(x)$ и по найденной функции $f(x)$ вероятность того, что в результате испытания X примет значение, не меньшее 2,1 и меньшее 2,5.

Дать геометрическую интерпретацию величины найденной вероятности $p\{2{,}1\le X<2{,}5\}$.

Решение

а) Плотность распределения вероятностей $f(x)$ равна производной от функции распределения $F(x)$, поэтому имеем $f(x)=\left((x-2)^2\right)'=2(x-2)$ при при $2{,}1\le x<2{,}5$ и $f(x)=0$ при $x\le 2$ и $x>3$. Таким образом, функция плотности распределения характеризуется выражением:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 2,\\ 2(x-2) & при \quad 2<x\le 3,\\ 0 & при \quad x>3.\end{cases}$$

б) Графики функции $F(x)$ и $f(x)$ представлены ниже (рис.5 и 6):

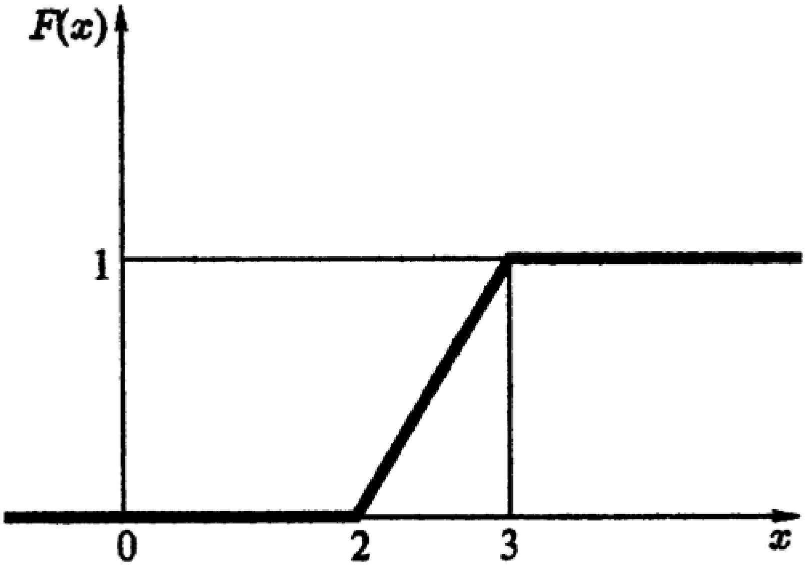

Рис. 5

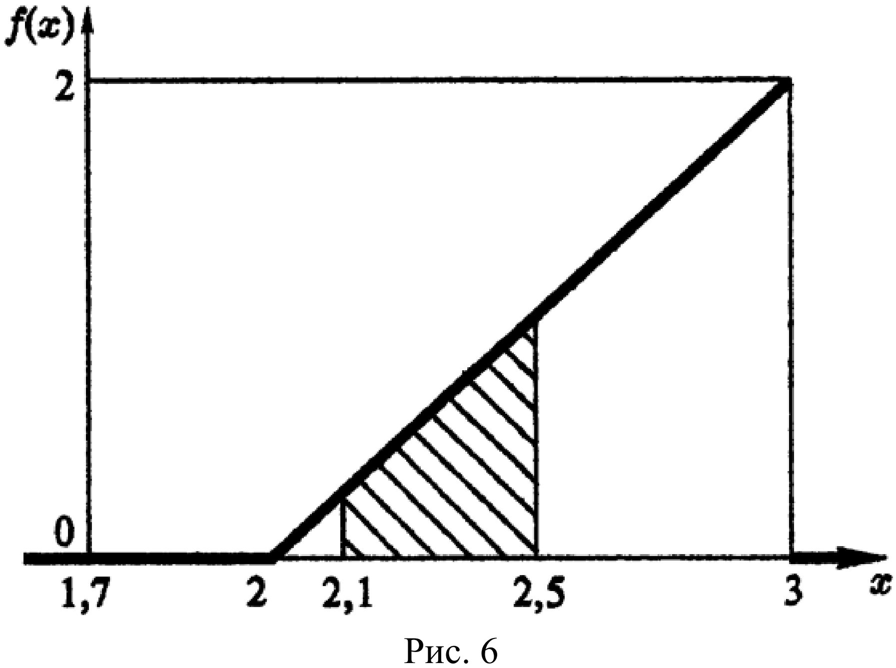

Рис. 6

в) Вероятность попадания случайной величины в интервал [2,1; 2,5) определим как приращение функции распределения в этом интервале:

$$p\{2{,}1< X <2{,}5\}=F(2{,}5)-F(2{,}1)=(0{,}5)^2-(0{,}1)^2=0{,}24.$$

Эту же вероятность найдем по известной функции плотности распределения:

$$p\{2{,}1 < X < 2{,}5\} = \int_{2,1}^{2,5} f(x)dx = 2\int_{2,1}^{2,5} (x-2)^2 dx = (x-2)^2\Big|_{2,1}^{2,5} = 0{,}24.$$

Полученную вероятность $p\{2{,}1 \le X < 2{,}5\}$ можно интерпретировать геометрически как площадь заштрихованной криволинейной трапеции, приведенной на рис. 6.

Пример 10. Случайная величина X задана функцией плотности распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \;\; x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 2\sin 2x & \textit{при} \;\; \dfrac{\pi}{4} < x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 & \textit{при} \;\; x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Решение

Если $x \le \dfrac{\pi}{4}$, то $f(x) = 0$, следовательно,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot d\xi = 0.$$

Если $\dfrac{\pi}{4} < x \le \dfrac{\pi}{2}$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{4}} 0 \cdot d\xi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} 2\sin 2\xi \, d\xi = \cos 2\xi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{x} = -cos2x.$$

Если $x > \dfrac{\pi}{2}$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{4}} 0 \cdot d\xi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin 2x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0 \cdot d\xi = 0 - \cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + 0 = 1.$$

Таким образом, функция распределения характеризуется выражением:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le\dfrac{\pi}{4},\\ -\cos 2x & \text{при } \dfrac{\pi}{4}<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Ниже приведем функции плотности трех важных непрерывных случайных величин.

Упражнения

1. График функции плотности распределения $f(x)$ случайной величины X имеет вид, изображенный на рис. 7.

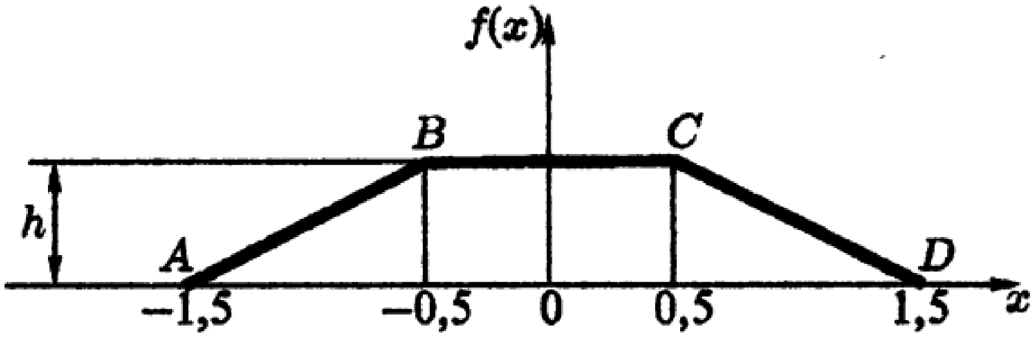

Рис. 7

Найти аналитическое выражение для $f(x)$ на всей числовой оси.

2. Случайная величина X подчинена закону Симпсона (закону равнобедренного треугольника) на отрезке $x\in[-c;c]$ (рис. 8). Найти: а) функция плотности распределения вероятностей этой случайной величины; б) вероятность попадания величины X в интервал $(c/2;c)$.

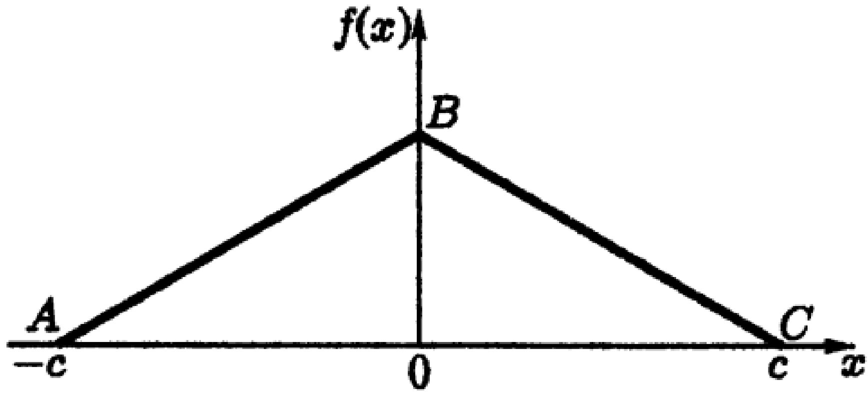

Рис. 8

Равномерно распределенная, на отрезке $[a;b]\subset R^1$ случайная величина. Выражения для функции плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<a,\\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a\le x\le b,\\ 0 & \text{при } x>b.\end{cases}$$

Ее график имеет вид рис. 9.

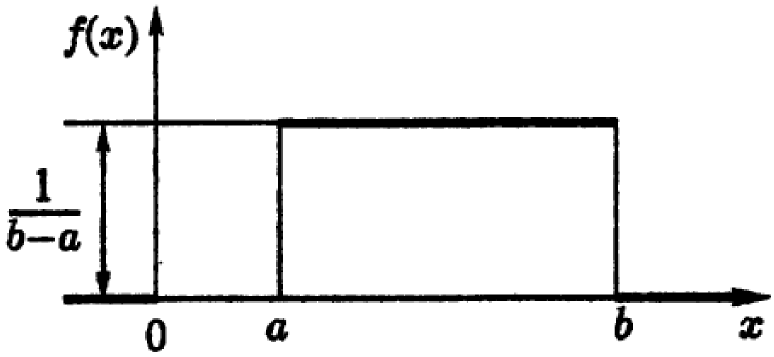

Рис. 9

А, график ее функции распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a\le x\le b,\\ 1 & \text{при } x>b.\end{cases}$$

имеет вид рис.10.

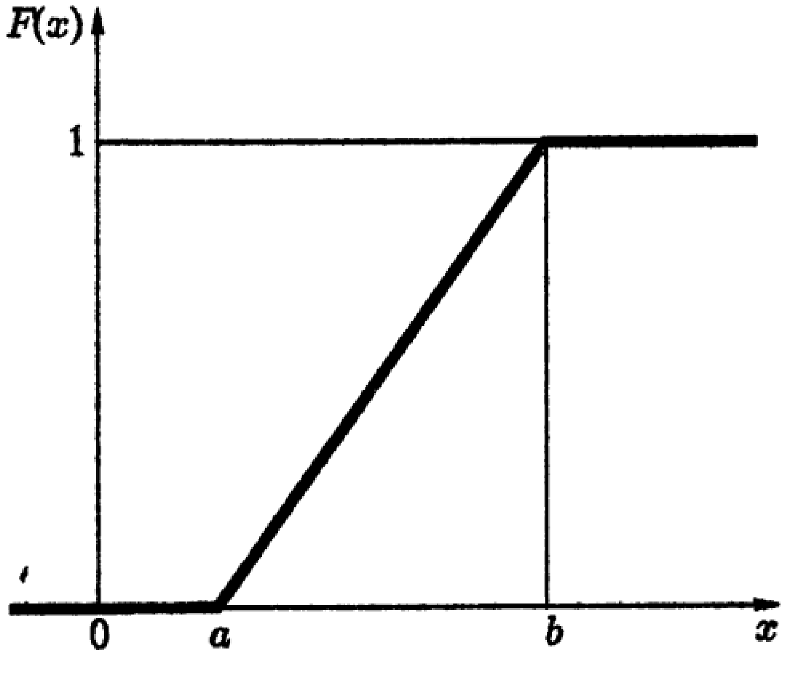

Рис. 10

Равномерный закон распределения используется при анализе ошибок округления при проведении числовых расчетов (например, ошибка округления числа до целого распределена равномерно на отрезке [-0,5; +0,5]), в ряде задач массового обслуживания, при статистическом моделировании наблюдений, подчиненных заданному распределению. Так, случайная величина X, распределенная по равномерному закону на отрезке [0;1], называемая «*случайным числом* от 0 до 1», служит исходным материалом для получения случайных величин с любым законом распределения.

Пример 11. Поезда метрополитена идут регулярно с интервалом 2 мин. Пассажир выходит на платформу в случайный момент времени. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше полминуты.

Решение

Случайная величина X – время ожидания поезда на временном (в минутах) отрезке [0;2] имеет равномерный закон распределения

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{при } 1\le x\le 2, \\ 0 & \text{при } x>2. \end{cases}$$

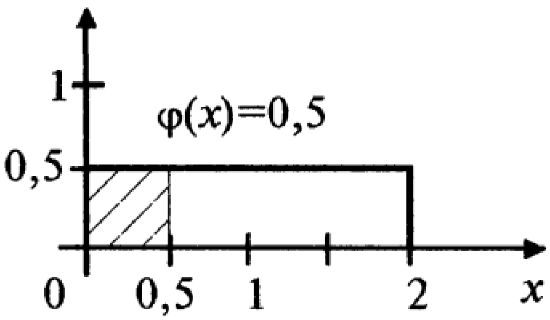

Рис. 11

Поэтому вероятность того, что пассажиру придется ждать не более полминуты, равна 1/4 от равной единице площади прямоугольника (рис. 11), т.е.

$$p\{X\le 0,5\}=\int_0^{0,5}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}x\Big|_0^{0,5}=\frac{1}{4}.$$

Нормальное распределение, называемое еще *гауссовским* распределением, играет важнейшую роль в теории вероятностей, математической статистике и на практике. Главная особенность, выделяющая его среди других законов, состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях (см. §6).

Говорят, что случайная величина X имеет *нормальный закон распределение,* если ее плотность задается выражением

$$\varphi_N(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $\sigma > 0$, a- заданные числа, параметры этого распределения. Графики функции плотности (рис. 12а) и функции распределения нормального распределения (рис. 12б) с параметрами σ^2 и a, т.е. $N\left(a;\, \sigma^2\right)$ приведены ниже.

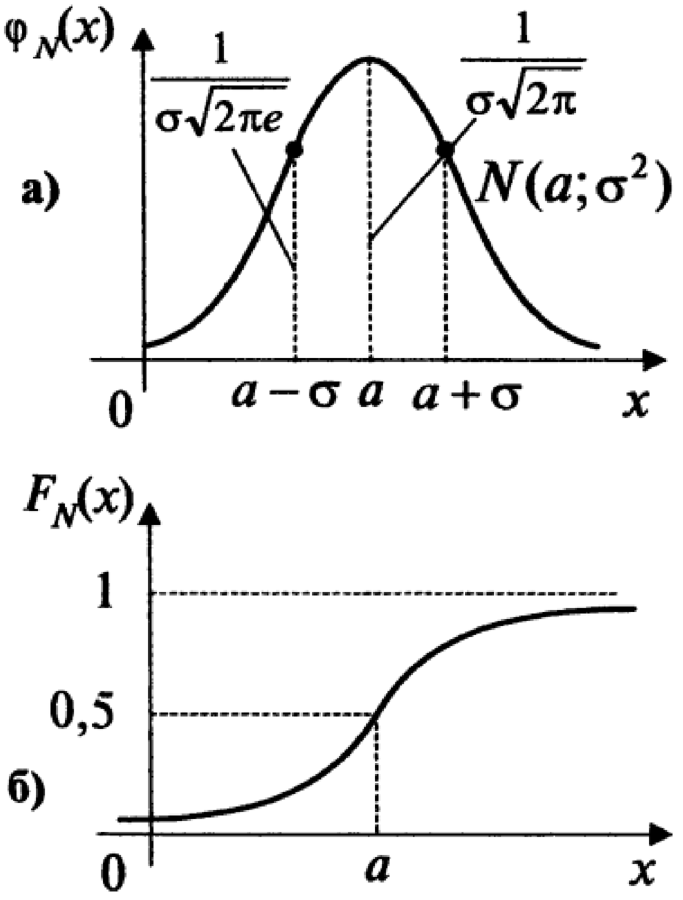

Рис. 12

Говорят, что случайная величина X имеет *показательный (экспоненциальный) закон распределения,* если ее плотность задается выражением

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & при \;\; x \ge 0, \\ 0 & при \;\; x < 0. \end{cases}$$

где λ-некоторый параметр.

Функция распределения $F(x)$ показательной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & при \;\; x > 0, \\ 0 & при \;\; x > 0. \end{cases}$$

Графики функции плотности (рис. 13а) и функции распределения нормального распределения (рис. 12б) приведены ниже.

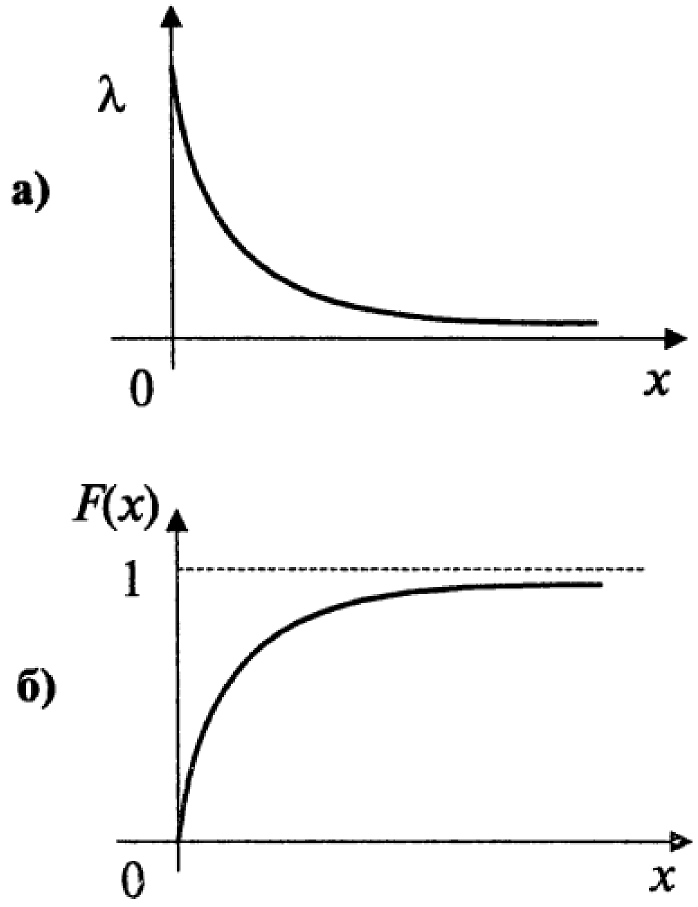

Рис. 13

Показательный закон распределения играет большую роль в теории массового обслуживания и теории надежности. Так, например, интервал времени T между двумя соседними событиями в простейшем потоке имеет показательное распределение с параметром λ - интенсивностью потока.

Свойства функции плотности распределения:

1) $f(x) \geq 0$ во всех точках $x \in R^1$, где существует $F'(x)$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;

3) $f(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Пример 12. Случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью распределения вероятностей $f(x) = 0{,}5e^{-0{,}5x}$ при $x \geq 0$; при $x < 0$ функция $f(x) = 0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение из интервала (2; 4).

Решение

Искомая вероятность того, что X примет значение из интервала (2; 4), равна

$$p\{2<X<4\}=\int_2^4 0,5e^{-0,5x}dx=-e^{-0,5x}\Big|_2^4=e^{-0,5\cdot 4}-e^{-0,5\cdot 2}=0,3678-0,1353=0,2325.$$

Пример 13. Случайная величина X , все возможные значения которой принадлежат интервалу $(0;\pi/3)$, задана в этом интервале функцией плотности распределения $f(x)=C\sin 3x$. Найти коэффициент C.

Решение

Если функция $f(x)$ представляет собой функцию распределения непрерывной случайной величины X , заданной в интервале $(a;b)$, то выполняется условие: $\int_a^b f(x)dx=1$. Неизвестный коэффициент C в выражении функции $f(x)=C\sin 3x$ определим так, чтобы это условие выполнялось для данной случайной величины X . Для этого найдем

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}} C\cdot\sin 3xdx=-\frac{C}{3}(\cos\pi-\cos 0)=-\frac{C}{3}(-1-1)=\frac{2C}{3}.$$

и приравняем этот результат к единице: $\frac{2C}{3}=1.$Из последнего равенства

получим $C=\frac{3}{2}$.

Упражнение

Дана функция $y=\frac{A}{x^4}$. Найти значение постоянного множителя A, при котором эта функция могла бы характеризовать плотность распределения вероятностей случайной величины X при условии, что все возможные значения величины Х находятся на луче $(2;+\infty)$.

Из предыдущей лекции известно, что исчерпывающей характеристикой случайных величин является их закон распределения: ряд распределения для дискретных случайных величин; функция распределения или функция плотности распределения. Но далеко не в каждой задаче нужно знать весь закон распределения. В ряде случаев можно обойтись одним или несколькими числами, отражающими наиболее важные особенности закона распределения: например, числом имеющим смысл «среднего значения» случайной величины, или же числом, характеризующим средний размер отклонения случайной величины от своего среднего значения, и т.д. Такого рода числа называют числовыми характеристиками случайной величины (или соответствующего закона распределения). Их роль в теории вероятностей чрезвычайно велика; многие задачи удается решить до конца, оставляя в стороне законы распределения и оперируя только числовыми характеристиками.

Определение 1. Любая числовая величина, так или иначе характеризующая закон распределения некоторой случайной величины, называется *параметром* этого распределения.

Из бесконечного количества всевозможных параметров, важнейшее значение имеют два: *математическое ожидание* и *дисперсия* случайной величины.

2.1.Математическое ожидание и дисперсия случайной величины

Определение 2. *Математическим ожиданием дискретной случайной величины* X , имеющий ряд распределения

Таблица 1

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

называется число

$$M\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i.$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины X имеет следующий вероятностный смысл.

Пусть проведено N испытаний случайной величины X , в результате чего получены значения $x_1,x_2,...,x_N$. Среднее арифметическое этих чисел

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_N}{N}$$

при больших n близко к $M\left(X\right)$. Строгая формулировка этого утверждения приведем в §6 (теорема Чебышева).

Здесь мы приведем нестрогое рассуждение, поясняющее причины такого явления. Если величина X дискретна и ее ряд распределения имеет вид табл.1, то в результате N испытаний мы получим p_1N раз значение x_1; p_2N раз - значение x_2;...; p_nN раз - значение x_n. Действительно, если вероятность события A равна p, то в N испытаниях событие A наступит примерно Np раз (согласно статистическому определению вероятности (см. §1)). После N испытаний сумма значений будет приближенно равна

$$x_1p_1N+x_2p_2N+\cdots+x_np_nN\,.$$

Среднее арифметическое полученных в результате испытаний значений равно

$$\frac{x_1 p_1 N + x_2 p_2 N + \cdots + x_n p_n N}{N} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

что совпадает с $M(X)$.

В связи с этим математическое ожидание называют также средним значением случайной величины.

Пример 1. Пусть X количество очков при бросании игральной кости. Ряд распределения этой величины имеет вид

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Найдем математическое ожидание

$$M(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

Пример 2. По многолетним статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика равна 0,515. Составить закон распределения случайной величины X - числа мальчиков в семье из 4 детей. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

Решение

Число мальчиков в семье из $n = 4$ представляет случайную величину X с множеством значений $X = m = 0,1,2,3,4,$ вероятности, которых определяются по формуле Бернулли:

$$p\{X = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где } q = 1 - p.$$

В нашем случае $n = 4$, $p = 0{,}515$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}515 = 0{,}485$.

Вычислим

$$p\{X = 0\} = C_4^0 0{,}515^0 \cdot 0{,}485^4 = 0{,}055;$$

$$p\{X = 1\} = C_4^1 0{,}515^1 \cdot 0{,}485^3 = 0{,}235;$$

$$p\{X = 2\} = C_4^2 0{,}515^2 \cdot 0{,}485^2 = 0{,}375;$$

$$p\{X = 3\} = C_4^3 0{,}515^3 \cdot 0{,}485^1 = 0{,}265;$$

$$p\{X = 4\} = C_4^4 0{,}515^4 \cdot 0{,}485^0 = 0{,}070.$$

Ряд распределения имеет вид

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,055	0,235	0,375	0,265	0,070

Убеждаемся, что $\sum_{i=1}^{5} p_i = 0,055 + 0,235 + 0,375 + 0,265 + 0,070 = 1$.

Найдем математическое ожидание

$M(X) = 0 \cdot 0,055 + 1 \cdot 0,235 + 2 \cdot 0,375 + 3 \cdot 0,265 + 4 \cdot 0,070 = 2,06.$

Математическое ожидание дискретной случайной величины X, имеющей счетное множество значений, равно

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Так как этот ряд может и расходиться, то соответствующая случайная величина может и не иметь математического ожидания. Например, случайная величина X с рядом распределения

x_i	2	2^2	2^3	$\cdots$	2^i	$\cdots$
p_i	$1/2$	$1/2^2$	$1/2^3$	$\cdots$	$1/2^i$	$\cdots$

не имеет математического ожидания, ибо сумма ряда равна ∞. На практике, как правило, множество возможных значений случайной величины распространяется лишь на ограниченный участок оси абсцисс и, значит, математическое ожидание существует.

Пример 3. После ответа студента на вопросы экзаменационного билета экзаменатор задает студенту дополнительные вопросы. Преподаватель прекращает задавать дополнительные вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой заданный дополнительный вопрос равна 0,9. Требуется:

а) составить ряд распределения случайной дискретной величины X - числа дополнительных вопросов, которые задаст преподаватель студенту;

б) Найти математическое ожидание этой случайной величины.

Решение

а) Дискретная случайная величина X - число заданных дополнительных вопросов - имеет следующие возможные значения: $1,2,3,\ldots,k,\ldots$. Найдем вероятности этих возможных значений.

Величина X примет возможное значение 1 (экзаменатор задаст только один вопрос), если студент не ответит на первый вопрос. Вероятность этого возможного значения равна $1-0,9=0,1$. Таким образом,

$$p\{X=1\}=0,1.$$

Величина X примет возможное значение 2 (экзаменатор задаст только два вопроса), если студент ответит на первый вопрос (вероятность этого события равна 0,9) и не ответит на второй (вероятность этого события равна 0,1). Таким образом,

$$p\{X=2\}=0{,}9\cdot 0{,}1=0{,}09.$$

Аналогично найдем

$$p\{X=3\}=0{,}9^2\cdot 0{,}1=0{,}081; \qquad p\{X=k\}=0{,}9^{k-1}\cdot 0{,}1; \ldots.$$

Напишем искомый закон распределения:

x_k	1	2	3	…	k	…
p_k	0,1	0,09	0,081	…	$0{,}9^{k-1}\cdot 0{,}1$	…

Проверяем, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 0{,}1+0{,}1\cdot 0{,}9+0{,}1\cdot 0{,}9^2+\cdots+0{,}1\cdot 0{,}9^{k-1}+\cdots=$$

$$=0{,}1\left(1+0{,}9+0{,}9^2+\cdots\right)=0{,}1\cdot\frac{1}{1-0{,}9}=\frac{0{,}1}{0{,}1}=1.$$

Здесь использовали формулу суммы сходящегося $\left(|q|<1\right)$ геометрического ряда: $S=\dfrac{u}{1-q}$ при $u=1,\ q=0{,}9.$

Вычислим математическое ожидание

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = 1\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}09+3\cdot 0{,}081+\cdots+k\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^{k-1}+\cdots=$$

$$=0{,}1\left(1+2\cdot 0{,}9+3\cdot 0{,}9^2+\cdots+k\cdot 0{,}9^{k-1}+\cdots\right).$$

Для вычисления суммы полученного ряда воспользуемся формулой:

$$S(x)=1+2x+3x^2+\cdots+k\,x^{k-1}+\cdots=\left(x+x^2+\cdots+x^k+\cdots\right)'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

(т.е. сумма данного ряда является производной сходящегося геометрического ряда со знаменателем $|q|=|x|<1$). При $x=0{,}9$ имеем: $S(0{,}9)=\dfrac{1}{(1-0{,}9)^2}=100.$

Тогда $M(X)=0{,}1\cdot 100=10.$

Упражнения

1. Торговый агент имеет 5 телефонных номеров потенциальных покупателей и звонит им до тех пор, пока не получит заказ на покупку товара. Вероятность того, что потенциальный покупатель сделает заказ, равна 0,4. Составить ряд распределения числа телефонных разговоров, которые предстоит провести агенту. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

2. Охотник, имеющий 4 патрона, стреляет по дичи до первого попадания или до израсходования всех патронов. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,6, при каждом последующем - уменьшается на 0,1. Необходимо: а) составить ряд распределения числа патронов, израсходованных охотником; б) найти математическое ожидание этой случайной величины.

3. Из поступивших в ремонт 10 часов 7 нуждаются в общей чистке механизма. Часы не рассортированы по виду ремонта. Мастер, желая найти часы, нуждающиеся в чистке, рассматривает их поочередно и, найдя такие часы, прекращает дальнейший просмотр. Составить ряд распределения числа просмотренных часов. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

4. Имеются 4 ключа, из которых только один подходит к замку. Составить ряд распределения числа попыток открывания замка, если испробованный ключ в последующих попытках не участвует. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

5. Радист вызывает корреспондента, причем каждый последующий вызов производится лишь в том случае, если предыдущий вызов не принят. Вероятность того, что корреспондент примет вызов, равна 0,4. Составить ряд распределения числа вызовов, если: а) число вызовов не более 5; б) число вызовов не ограничено. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

Определение 3. Пусть X - непрерывная случайная величина и $f\left(x\right)$- ее функция плотности распределения. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X называется число

$$M\left(X\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

(если этот интеграл сходится).

Математическое ожидание непрерывной случайной величины имеет такой же вероятностный смысл, что и математическое ожидание дискретной случайной **величины.**

Пример 4. Функция $f\left(x\right)$ задана в виде:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1,\\ \dfrac{A}{x^4} & при \quad x>1.\end{cases}$$

Найти: а) значение постоянной A, при которой $f(x)$ будет функцией плотности некоторой случайной величины X; б) математическое ожидание случайной величины X.

Решение

а) Для того чтобы $f(x)$ была функцией плотности случайной величины X, она должна быть неотрицательна, т.е. $f(x)\ge 0$ или $\dfrac{A}{x^4}\ge 0$, откуда $A\ge 0$ для нее $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{1}0\cdot dx+\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{A}{x^4}dx=0+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{A}{x^4}dx=\frac{A}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^3}\Big|_1^b\right)=$$

$$=\frac{A}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^3}\Big|_1^b\right)=\frac{A}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b^3}\right)=\frac{A}{3}=1.$$

откуда $A=3$.

б) По формуле $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ вычислим математическое ожидание

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{1}x\cdot 0\cdot dx+\int\limits_{1}^{+\infty}x\frac{3}{x^4}dx=0+3\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^3}=$$

$$=3\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\Big|_1^b\right)=\frac{3}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{3}{2}.$$

Пример 5. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4} & при \quad 0<x\le 2,\\ 1 & при \quad x>2.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины X.

Решение

Сначала найдем функцию плотности

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\, x>2\\ \dfrac{x}{2} & при \quad 0<x\le 2.\end{cases}$$

Теперь по формуле $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ вычислим математическое ожидание

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} x\cdot 0\cdot dx+\int\limits_{0}^{2} x\frac{x}{2}dx=\int\limits_{2}^{+\infty} x\cdot 0\cdot dx=0+\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2+0=\frac{2^3}{6}=\frac{4}{3}.$$

Упражнения

1. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x<0,\\ Cxe^{-x} & при \quad x\ge 0.\end{cases}$$

При каком значении параметра C эта функция является функцией плотности распределения некоторой непрерывной случайной величины X.

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

2. Случайная величина X распределена по закону Коши:

$$f(x)=\frac{A}{1+x^2}$$

Найти: а) коэффициент A; б) математическое ожидание случайной величины X.

3. Случайная величина X распределена по закону Лапласа:

$$f(x)=Ae^{-\lambda|x|}$$

Найти: а) коэффициент A; б) математическое ожидание случайной величины X.

Свойства математического ожидания

1) $M(\lambda)=\lambda$, $\lambda-$любая константа (постоянное число формально можно рассматривать как случайную величину, принимающую единственное значение $\lambda-$ с вероятностью единица);

2) $M(\lambda X)=\lambda M(X)$ для любой случайной величины X и произвольного числа λ.

3) $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$ для произвольных случайных величин X, Y;

4) $M(XY)=M(X)M(Y)$ для произвольных независимых случайных величин X и Y (см. п. 2.)

Доказательство этих свойств опускаем.

Отметим еще раз, что математическое ожидание является (постоянным, не зависящим от опыта) числом, характеризующим определенное свойство случайной величины, а именно - устойчивость среднего арифметического полученных в результате испытаний значений.

Эта характеристика является важной, но далеко не полной.

Следующее понятие также сопоставляет случайной величине некоторое число, характеризующее определенное свойство этой величины.

Определение 4. *Дисперсией* случайной величины X называется число

$$D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2,$$

т.е. математическое ожидание случайного квадрата отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания.

Таким образом, дисперсия характеризует величину рассеяние или разброса возможных значений случайной величины вокруг ее среднего значения. Ясно, что это тоже очень важный параметр.

Заметим, что в качестве характеристики рассеяния нельзя брать математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания $M(X-a)$ (где $a=M(X)$), ибо согласно свойствам математического ожидания эта величина равна нулю для любой случайной величины.

Выбор дисперсии, определяемой по формуле $D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2$ в качестве характеристики рассеяния значений случайной величины X оправдывается также тем, что математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от постоянной величины C минимально именно тогда, когда эта постоянная C равна математическому ожиданию $M(X)=a$, т.е.

$$\min_C = M(X-C)^2 = M(X-a)^2 = D(X).$$

Используя свойства математического ожидания, легко доказать следующую, более удобную для практических расчетов, формулу дисперсии

$$D(X)=M\left(X^2-2X\cdot M(X)+\left[M(X)\right]^2\right)=M\left(X^2\right)-2\left[M(X)\right]^2+\left[M(X)\right]^2=$$

$$=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2,$$

т.е.

$M\left(X^2\right)=\sum_i x_i^2 p_i -$ для дискретной случайной величины;

$M\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx -$ для непрерывной случайной величины.

Таким образом, справедливы следующие формулы, упрощающие вычисление дисперсии:

$$D(X)=\sum_i x_i^2 p_i-\left[\sum_i x_i\, p_i\right]^2$$ – для дискретной случайной величины;

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left[\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\right]^2$$ – для непрерывной случайной величины.

Дисперсия, по сути, является квадратическим показателем. Иногда более удобно использовать аналогичный линейный параметр, называемый *среднеквадратическим отклонением* случайной величины

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Пример 6. Пусть ряд распределения величины X имеет вид

x_i	-1	5
p_i	0,3	0,7

Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой случайной величины.

Решение

Найдем

$$M(X)=(-1)\cdot 0,3+5\cdot 0,7=3,2;$$

$$M\left(X^2\right)=(-1)^2\cdot 0,3+5^2\cdot 0,7=17,8.$$

Тогда

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2=17,8-(3,2)^2=7,56;$$

$$\sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{7,56}\approx 2,7495.$$

Пример 7. Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение случайной величины X из примера 4.

Решение

Вначале найдем

$$M\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\left(\frac{3}{x^4}\right)dx=3.$$

Вычисление интеграла производим аналогично вычислению математического ожидания в примере 4. Теперь учитывая, что $M(X)=\dfrac{3}{2}$ (см. пример 4) имеем:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left[\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\right]^2=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4};$$

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Упражнения

1. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

x_i	-1	0	3
p_i	0,4	0,4	0,2

Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой случайной величины.

2. Дисперсия дискретной случайной величины X, заданной рядом распределения, равна 0,06.

x_i	1	x_2
p_i	0,4	0,6

Найти значение $x_2 > 0$.

3. Непрерывная случайная величина X задана функцией плотности

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{3x^2}{64} & \text{при } 0 < x \le 4, \\ 0 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой случайной величины.

4. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x}{7} & \text{при } 0 < x \le 7, \\ 1 & \text{при } x > 7. \end{cases}$$

Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой случайной величины.

5. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \ \ x \le 0,\\ \dfrac{x^2}{36} & при \ \ 0<x\le 6,\\ 1 & при \ \ x>6.\end{cases}$$

Найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой случайной величины.

Приведем свойства дисперсии и среднеквадратического отклонения.

Свойства дисперсии

1) $D(X)\ge 0$, где X – любая случайная величина;

2) $D(\lambda)=0$, где λ – любая константа (постоянное число формально можно рассматривать как случайную величину, принимающую единственное значение λ – с вероятностью единица);

3) $D(\lambda X)=\lambda^2 D(X)$ для любой случайной величины X и произвольного числа λ.

4) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$ для независимых случайных величин X и Y (см. п. 2.).

Доказательство этих свойств опускаем.

Свойства среднеквадратического отклонения.

1) $\sigma(\lambda)=0,$ т.е. среднеквадратическое отклонение постоянной равно нулю.

2) $\sigma(\lambda X)=|\lambda|\sigma(X)$ $\sigma(\lambda X)=|\lambda|\sigma X$ для любой случайной величины X и произвольного числа λ.

3) $\sigma(X+Y)=\sqrt{[\sigma(X)]^2+[\sigma(Y)]^2}$ для независимых случайных величин X и Y (см. п. 2.).

Эти свойства непосредственно вытекают из свойств дисперсии и определения среднеквадратического отклонения.

2.2. Независимость случайных величин. Математические операции над случайными величинами

Определение 5. Две случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не меняется от того, какие возможные значения приняла другая величина.

Так, если дискретная случайная величина X может принимать значения x_i, $i=1,2,....,n$, а случайная величина Y - значения y_j, $j=1,2,....,n$, то независимость дискретных случайных величин X и Y означает независимость событий $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$ при любых $i = 1, 2, ..., n$ и $j = 1, 2, ..., n$. В противном случае случайные величины называются *зависимыми.*

Например, если имеются билеты двух различных денежных лотерей, то случайные величины X и Y, выражающие соответственно выигрыш по каждому билету (в денежных единицах), будут независимыми, так как при любом выигрыше по билету одной лотереи (например, при $X = x_i$) закон распределения выигрыша по другому билету (Y) не изменится. Если же случайные величины X и Y выражают выигрыш по билетам одной денежной лотереи, то в этом случае X и Y являются зависимыми, ибо любой выигрыш по одному билету $\{X = x_i\}$ приводит к изменению вероятностей выигрыша по другому билету (Y), т.е. к изменению закона распределения Y.

Определим ***математические операции*** над дискретными случайными величинами.

Пусть даны две случайные величины - X и Y:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

y_j	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
p_j	p_1	p_2	$\cdots$	p_m

Произведением kX *случайной величины* X *на постоянную величину* k называется случайная величина, которая принимает значения kx_i с теми же вероятностями p_i.

$m-$*й степенью случайной величины* X, т.е. X^m, называется случайная величина, которая принимает значения x_i^m с теми же вероятностями p_i.

Пример 8. Дана случайная величина X:

x_i	-2	1	2
p_i	0,5	0,3	0,2

Найти закон распределения случайных величин: а) $Y = 3X$; б) $Z = X^2$.

Решение

а) Значения случайной величины Y будут: $3(-2) = -6$; $3 \cdot 1 = 3$; $3 \cdot 2 = 6$ с теми же вероятностями 0,5; 0,3; 0,2, т.е.

y_i	-6	3	6
p_i	0,5	0,3	0,2

б) Значения случайной величины Z будут: $(-2)^2=4,\ 1^2=1,\ 2^2=4$ с теми же вероятностями 0,5; 0,3; 0,2. Так как значение $Z=4$ может быть получено возведением в квадрат значений (-2) с вероятностью 0,5 и (+2) с вероятностью 0,2, то по теореме сложения $p\{Z=4\}=0,5+0,2=0,7$. Итак, закон распределения случайной величины Z:

z_i	1	4
p_i	0,3	0,7

Суммой (разностью или произведением) случайных величин X *и* Y называется случайная величина, которая принимает все возможные значения вида x_i+y_j $\left(x_i-y_j\right.$ или $\left.x_i\cdot y_j\right)$, где $i=1,2,...,n$; $j=1,2,...,m$, с вероятностями p_{ij} того, что случайная величина X примет значение x_i, а Y - значение y_j:

$$p_{ij}=p\left[\{X=x_i\}\{Y=y_j\}\right]$$

Если случайные величины X и Y независимы, т.е. независимы любые события $\{X=x_i\}$, $\{Y=y_j\}$, то по теореме умножения вероятностей для независимых событий

$$p_{ij}=p\{X=x_i\}\cdot p\{Y=y_j\}=p_i\cdot p_j.$$

Замечание. Приведенные выше определения операций над дискретными случайными величинами нуждаются в уточнении, так как в ряде случаев одни и те же значения x_i^m, $x_i\pm y_j$, x_iy_j могут получаться разными способами при различных значениях x_i, y_j, вообще говоря, с различными вероятностями p_i, p_j (см. примеры 8.б и 9).

Пример 9. Даны законы (ряды) распределения двух независимых случайных величин X и Y:

x_i	0	2	4
p_i	0,5	0,2	0,3

y_i	-2	0	2
p_i	0,1	0,6	0,2

Найти закон распределения случайных величин: а) $Z = X - Y$; б) $U = XY$.

Решение

а) Для удобства нахождения всех значений разности $Z = X - Y$ и их вероятностей составим вспомогательную таблицу, в каждой клетке которой поместим в левом углу значения разности $Z = X - Y$, а в правом углу - вероятности этих значений, полученные в результате перемножения вероятностей соответствующих значений случайных величин X и Y.

	y_j	-2	0	2
x_i	p_j p_i	0,1	0,6	0,3
0	0,5	2 0,05	0 0,30	-2 0,15
2	0,2	4 0,02	2 0,12	0 0,06
4	0,3	6 0,03	4 0,18	2 0,09

Например, если $X = 4$ (последняя строка таблицы), а $Y = -2$ (третий столбец таблицы), то случайная величина $Z = X - Y$ принимает значение

$$Z = 4 - (-2) = 6$$

с вероятностью

$$p\{Z = 6\} = p\{X = 4\} p\{Y = -2\} = 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}03.$$

Эти числа $Z = 6$ и $p = 0{,}03$ находятся в клетке на пересечении последней строки и третьего столбца.

Так как среди 9 значений Z имеются повторяющиеся, то соответствующие вероятности их складываем по теореме сложения вероятностей. Например, значение $Z = X - Y = 2$ может быть получено, когда $X = 0$, $Y = -2$ (с вероятностью 0,05); $X = 2$, $Y = 0$ А=2, Г=0 (с вероятностью 0,12); $X = 4$, $Y = 2$ (с вероятностью 0,09), поэтому

$p\{Z = 2\} = 0{,}05 + 0{,}12 + 0{,}09 = 0{,}26$ и т.д.

В результате получим ряд распределения для Z:

z_k	-2	0	2	4	6
p_k	0,15	0,36	0,26	0,20	0,03

Убеждаемся в том, что условие $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$ выполнено.

б) Ряд распределения для $U = XY$ находится аналогично п. а).

u_k	-8	-4	0	4	8
p_k	0,03	0,02	0,80	0,06	0,09

Замечание. Выше ввели понятие независимости случайных величин X и Y, основанное на независимости связанных с ними событий $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$ при любых i и j. Ниже можно дать общее определение независимых непрерывных случайных величин, основанное на независимости событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$. Напомним, что необходимость введения события такого рода мы обсудили в §4.

Определение 6. Непрерывные величины X и Y независимы, если независимы события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$, где x и y две любые действительные числа.

Иначе говоря, величины X и Y независимы, если при любых x и y справедливо равенство

$$p\{X < x,\ Y < y\} = p\{X < x\} \cdot p\{Y < y\}. \quad (1)$$

или в эквивалентной записи

$$F(x, y) = F_1(x) F_2(y), \quad (2)$$

где $F(x, y)$, $F_1(x)$ и $F_2(y)$, обозначают соответственно функции распределения для системы (X, Y), величины X и величины Y.

Из соотношения (2), очевидно, следует

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) = \left[F(x_2) - F(x_1)\right] \cdot \left[F(y_2) - F(y_1)\right].$$

т. е.

$$p\{x_1 \le X < x_2,\ y_1 \le Y < y_2\} = p\{x_1 \le X < x_2\}\, p\{y_1 \le Y < y_2\}. \quad (3)$$

Это значит, что независимыми являются не только события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$, но и любые два события вида $\{x_1 \le X < x_2\}$, $\{y_1 \le Y < y_2\}$.

Формула (3) вскрывает смысл определения независимости величин X и Y: вероятность того, что величина Y примет значение из того или иного промежутка, не зависит от того, в каком промежутке окажется величина X. На более простом языке это означает:

Величины X и Y ***принимают свои значения независимо друг от друга.***

В случае, когда система (X,Y) - дискретного типа, условие независимости величин X и Y можно представить в более обозримом виде:

$$p\{X=\alpha, Y=\beta\} = p\{X=\alpha\}\, p\{Y=\beta\}. \qquad (4)$$

где α - любое возможное значение случайной величины X, а β - любое возможное значение величины Y.

Доказательство эквивалентности (4) и (3) (для системы дискретного типа) предоставляем провести качестве упражнения.

Иллюстрацией независимости случайных величин может служить следующий пример.

Пример 10. Пусть в опыте с двукратным бросанием игральной кости величина X есть число очков, выпадающих при первом бросании, а Y - число очков при втором бросании. В этом случае равенство (4) выполняется для любых двух чисел α, β из множества {1, 2, 3, 4, 5, 6}, и, следовательно, величины X и Y независимы.

Вернемся снова к общей теории.

Допустим, что система (X,Y) имеет некоторую функцию плотности $f(x,y)$. Постараемся для этого случая привести условие независимости X и Y к более простому виду.

Функцию плотности для X обозначим $f_1(x)$, а функцию плотности для Y - $f_2(x)$. Тогда условие независимости X и Y - условие (3) - перепишется в виде:

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dxdy = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\,dx \int_{y_1}^{y_2} f_2(y)\,dy$$

или

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy = \iint_G f_1(x)\, f_2(y) dxdy, \qquad (5)$$

где G обозначает прямоугольник, определенный неравенствами

$$x_1 \le X < x_2,\ y_1 \le Y < y_2 .$$

Таким образом, для любого прямоугольника G со сторонами, параллельными координатным осям, выполняется соотношения (5). Но в таком случае подынтегральные выражения должны совпадать:

$$f(x,y) = f_1(x)\, f_2(y). \qquad (6)$$

Соотношение (6) можно рассматривать как условие независимости величин X и Y, для случая, когда (X,Y) имеет некоторую функцию плотности.

Комментарий к свойствам $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$

1) Свойство 3) математического ожидания является на первый взгляд удивительным. Это свойство справедливо для произвольной пары случайных величин X, Y (безразлично, зависимых или независимых). Как известно, в случае зависимых величин совместное распределение пары не определяется распределением слагаемых. Формула $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$ определяет $M(X+Y)$ без использования закона распределения $X+Y$ (он в принципе неизвестен). Оказывается, что для вычисления $X+Y$ достаточно иметь (неполную) информацию о распределении $X+Y$, которую дают распределения X и Y.

2) Свойство 4) математического ожидания справедливо лишь для независимых случайных величин. Естественно измерять «степень зависимости» между X и Y разностью $M(XY)=M(X)M(Y)$ (которая равна нулю в том случае, когда величины независимы). На этой идее основаны понятия *ковариации* и *коэффициента корреляции* (см. ниже (см. п. 3)).

3) Свойства $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ позволяют легко вычислить среднее значение, дисперсию и среднеквадратическое отклонение *биномиальной случайной величины* (см. §4).

Пусть X - количество наступлений события A в серии из n независимых испытаний схемы Бернулли. Очевидно, что

$$X = X_1 + X_2 + \cdots X_n,$$

где $X_i -$ количество наступлений события A в $i-$м испытании $(i=1,2,...,n)$. Так в каждом испытании событие A наступает с вероятностью p и не наступает с вероятностью q, то ряд распределения случайной величины X_i имеет вид

0	1
q	p

(одно наступление события A - с вероятностью p и ноль наступления события $\overline{A}$ - с вероятностью q). Очевидно, что

$$M(X_i)=0\cdot q+1\cdot p=p, \quad D(X_i)=\left(0^2\cdot q+1^2\cdot p\right)-p^2=p-p^2=p(1-p)=pq.$$

Далее, используя свойство 3) математического ожидания, имеем

$$M(X)=M(X_1+\cdots+X_n)=M(X_1)+\cdots+M(X_n)=\underbrace{p+p+\cdots+p}_{n\ слагаемых}=np. \quad (7)$$

Наконец, используя свойство 4) дисперсии, находим

$$D(X)=D(X_1+\cdots+X_n)=D(X_1)+\cdots+D(X_n)=\underbrace{pq+pq+\cdots+pq}_{n\ слагаемых}=npq, \quad (8)$$

откуда

$$\sigma(X)=\sqrt{npq}. \tag{9}$$

4) Из свойства математического ожидания и дисперсии в качестве следствия вытекает важный теоретико-вероятностный факт, лежащий в основе законов больших чисел (см. §6, теорема Чебышева).

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ - независимые случайные величины с одинаковыми математическими ожиданиями $M(X_i)=a$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma(X_i)=\sigma$ т.е. $D(X_i)=\sigma^2$. Тогда для случайной величины

$$X=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$

справедливы равенства

$$M(X)=a, \quad D(X)=D\left(\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n},$$

$$\sigma(X)=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Таким образом, дисперсия случайной величины X уменьшается с ростом n, рассеяние значений X относительно $M(X)$ уменьшается, сама величина X теряет случайный характер.

2.3. Ковариация и коэффициент корреляции

Как уже было отмечено (см. п. 2), с помощью числа

$$k(X,Y)=M(XY)-M(X)M(Y) \tag{10}$$

можно измерять степень зависимости случайных величин X и Y. Свойство 4) математического ожидания означает, что $k(X,Y)=0$ для независимых случайных величин. Естественно считать, что чем больше $k(X,Y)$ по абсолютной величине, тем больше степень зависимости. Так как $k(X,Y)$ имеет размерность XY, то при изменении единицы масштаба его значение будет подвержено изменению. Чтобы избежать этого, введем коэффициент

$$r(X,Y)=\frac{k(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}=\frac{M(XY)-M(X)M(Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}, \tag{11}$$

где $\sigma(X), \sigma(Y)$ -среднеквадратические отклонения случайных величин X, Y.

Коэффициент $r(X,Y)$ является безразмерным: он не зависит от единиц измерения величин X и Y.

Определение 7. Пусть X, Y - случайные величины, XY,- их произведение, $M(X)$, $M(Y)$, $M(XY)$ - математические ожидания этих величин, $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ - среднеквадратические отклонения величин X и Y. Коэффициент $k(X,Y)$, определенный формулой (9), называется *коэффициентом ковариации,* а коэффициент $r(X,Y)$, определенный формулой (10),- *коэффициентом корреляции.*

Для теории вероятностей и ее приложений большее значение имеет коэффициент корреляции (основная причина этого - его безразмерность).

Свойства коэффициента корреляции

1) $r(X,Y)=0$ для независимых случайных величин X и Y.

2) $-1 \le r(X,Y) \le 1$ для любых двух случайных величин X и Y.

3) Если $|r(X,Y)|=1$, то случайные величины X и Y связаны соотношением

$$Y = aX + b, \tag{12}$$

где a и b - некоторые постоянные.

Обратно, если X и Y связаны условием (11), то $|r(X,Y)|=1$ $\left(r(X,Y)=-1 \text{ при } a<0 \text{ и } r(X,Y)=1 \text{ при } a>0\right)$.

Доказательство свойств коэффициента опускаем.

Комментарий к свойствам коэффициента корреляции

Свойства 1) – 3) означают, что коэффициент корреляции измеряет степень зависимости случайных величин X, Y в следующем смысле.

Для независимых величин X и Y коэффициент корреляции $r(X,Y)$ равен нулю. Крайние возможные значения $r(X,Y)$, равные 1 и - 1, соответствуют функциональной зависимости между X и Y, имеющей вид $Y = aX + b$. Функциональная зависимость между X и Y - самый тесный вид зависимости.

В общем случае независимость величин X и Y означает, что условное распределение величины Y при заданном значении $X = X_0$ совпадает с безусловным распределением Y; если же Y является функцией от X, то при

$X = X_0$ она принимает вполне определенное значение, так что при условии $X = X_0$ величина Y даже не является случайной.

Зависимостям, близким к зависимости вида $Y = aX + b$ соответствуют значения $r(X,Y)$, близкие к 1 или - 1 (при $a > 0$ или $a < 0$ соответственно). Если величины X и Y слабо зависимы, то значения $r(X,Y)$ близки к нулю.

Следует иметь в виду, что существуют зависимые величины X и Y, коэффициент корреляции которых равен нулю; их называют *некоррелированными*.

Если величины X и Y связаны нелинейной функциональной зависимостью, то $r(X,Y)$ может отличаться от 1 и -1.

Итак, коэффициент корреляции измеряет степень линейной зависимости между случайными величинами X и Y.

Для дискретных случайных величин коэффициенты $k(X,Y)$ и $r(X,Y)$ можно вычислить

$$k(X,Y) = \sum x_i y_j p_{ij} - \left(\sum x_i p_i\right)\left(\sum y_j p_j\right). \tag{13}$$

$$r(X,Y) = \frac{\sum x_i y_j p_{ij} - \left(\sum x_i p_i\right)\left(\sum y_i q_j\right)}{\sqrt{\sum x_i^2 p_i - \left(\sum x_i p_i\right)^2}\sqrt{\sum y_j^2 p_i - \left(\sum y_j q_j\right)^2}}. \tag{14}$$

Здесь x_i и y_j - значения случайных величин X и Y, p_i и q_j - соответствующие им вероятности, p_{ij} - вероятность совместного появления событий $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_j\}$.

Суммы, входящие в правые части равенств (13) и (14), можно выразить через математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение:

$$\sum x_i y_j p_{ij} = M(X,Y), \qquad \sum x_i p_i = M(X), \qquad \sum y_j q_j = M(Y),$$

$$\sqrt{\sum x_i^2 p_i - \left(\sum x_i p_i\right)^2} = \sqrt{D(X)} = \sigma(X),$$

$$\sqrt{\sum y_j^2 p_i - \left(\sum y_j q_j\right)^2} = \sqrt{D(Y)} = \sigma(Y).$$

Эти формулы вытекают из определения математического ожидания и дисперсии и величины XY.

Полезно также использовать равенства

$$k(X,Y)=\sum\left(x_i-M(X)\right)\left(y_j-M(Y)\right)p_{ij}, \qquad (15)$$

$$r(X,Y)=\frac{\sum\left(x_i-M(X)\right)\left(y_j-M(Y)\right)p_{ij}}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}, \qquad (16)$$

Согласно формуле (15), коэффициент ковариации равен математическому ожиданию произведения случайных величин $X-M(X)$ и $Y-M(Y)$.

Вывод формул (15), (16) осуществить самостоятельно.

Справедливы формулы, дающие выражение коэффициентов ковариации и корреляции через функции распределения непрерывных случайных величин X, Y и через функцию их совместного распределения. Эти формулы аналогичны (15), (16).

Пример 11. Определить ковариацию и коэффициент корреляции случайных величин X и Y имеющие следующие ряды распределения:

x_i	1	2
p_i	0,8	0,2

y_i	-1	0	1	2
p_i	0,2	0,3	0,3	0,2

Решение

Найдем математические ожидания и средние квадратические отклонения этих случайных величин:

$M(X)=1\cdot 0,8+2\cdot 0,2=1,2;\qquad M\left(X^2\right)=1^2\cdot 0,8+2^2\cdot 0,2=1,6;$

$D(X)=1,6-(1,2)^2=0,16;\qquad \sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,16}=0,4;$

$M(Y)=(-1)\cdot 0,2+0\cdot 0,3+1\cdot 0,3+2\cdot 0,2=0,5;$

$M\left(Y^2\right)=(-1)^2\cdot 0,2+0^2\cdot 0,3+1^2\cdot 0,3+2^2\cdot 0,2=1,3;$

$D(Y)=1,3-(0,5)^2=1,05;\qquad \sigma(Y)=\sqrt{D(Y)}=\sqrt{1,05}=1,025.$

Для нахождения математического ожидания $M(XY)$ произведения случайных величин X и Y нужно составить закон распределения произведения двух дискретных случайных величин (как это сделано выше при решении примера 9), а затем по нему найти $M(XY)$.

Закон распределения XY имеет вид:

$(x,y)_k$	-2	-1	0	1	2	4

p_k	0,1	0,1	0,3	0,3	0,15	0,05

Тогда имеем:

$$M(XY) = (-2)\cdot 0{,}1 + (-1)\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}15 + 4\cdot 0{,}05 = 0{,}5.$$

Вычислим ковариацию по формуле (10):

$$k(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = 0{,}5 - 1{,}2\cdot 0{,}5 = -0{,}1.$$

Вычислим коэффициент корреляции по формуле (11):

$$r(X,Y) = \frac{k(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)} = \frac{-0{,}1}{0{,}4\cdot 1{,}025} = -0{,}244,$$

т.е. между случайными величинами X и Y существует отрицательная линейная зависимость; следовательно, при увеличении (уменьшении) одной из случайных величин другая имеет некоторую тенденцию уменьшаться (увеличиваться).

2.4. Моменты случайных величин

Пусть X - случайная величина (для определенности - дискретная); x_i - ее значения; p_i - соответствующие им вероятности $(i = 1, 2, ..., n)$; $M(X)$- математическое ожидание X; a - произвольное число.

Рассмотрим следующие суммы:

$$m_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i, \qquad m_k' = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^k p_i, \qquad m_k'' = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^k p_i; \tag{17}$$

m_k называют *начальным моментом* k-го порядка, m_k' - *относительным моментом* k-го порядка (относительно числа a), m_k'' - *центральным моментом*. Заметим, что важнейшие характеристики случайной величины X математическое ожидание и дисперсия - представляют собой моменты этой величины, а именно, $M(X) = m_1$, $D(X) = m_2''$.

Существуют и другие характеристики случайной величины, описывающие ее различные свойства; эти характеристики, так же как $M(X)$ и $D(X)$, сравнительно просто выражаются через начальные и центральные моменты.

Выше отмечено, что математическое ожидание $M(X)$, или первый начальный момент, характеризует среднее значение или положение распределения случайной величины X на числовой оси; дисперсия $D(X)$ или второй центральный момент - степень рассеяния распределения X относительно $M(X)$. Моменты высших порядков служат для более подробного описания распределения.

Третий центральный момент служит для характеристики асимметрии (скошенности) распределения. Он имеет размерность куба случайной величины. Чтобы получить безразмерную величину, ее делят на σ^3, где σ - среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Полученная величина A называется *коэффициентом асимметрии* случайной величины:

$$A = \frac{m_3''}{\sigma^3}.$$

Если распределение симметрично относительно математического ожидания, то коэффициент асимметрии $A = 0$.

На рис. 1 показаны две кривые распределения: I и II. Кривая I имеет положительную (правостороннюю) асимметрию $(A > 0)$, а кривая II - отрицательную (левостороннюю) $(A < 0)$.

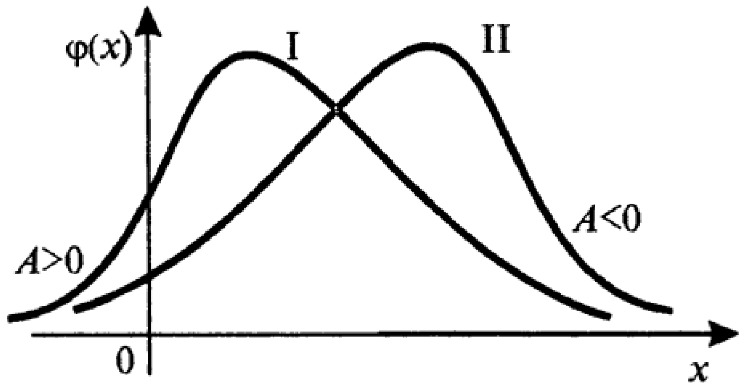

Рис. 1

Четвертый центральный момент служит для характеристики крутости (островершинности или плосковершинности) распределения.

Эксцессом (или коэффициентом эксцесса) случайной величины называется число

$$E = \frac{m_4''}{\sigma^4} - 3.$$

Число 3 вычитается из отношения $\frac{m_4''}{\sigma^4}$ потому, что для наиболее часто встречающегося нормального распределения (о нем идет речь в §6) отношение $\frac{m_4''}{\sigma^4} = 3$. Кривые, более островершинные, чем нормальная, обладают положительным эксцессом, более плосковершинные - отрицательным эксцессом (рис.2).

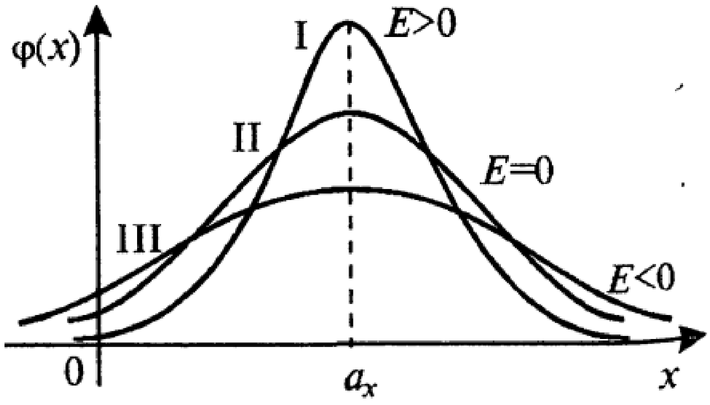

Рис. 2

Вычисление центральных моментов несколько облегчается, если сначала найти относительные (относительно некоторого подходящего числа) моменты, а затем преобразовать их в центральные по формулам:

$$\begin{aligned} m_2'' &= m_2' - \left(m_1'\right)^2, \\ m_3'' &= m_3' - 3m_2'm_1' + 2\left(m_1'\right)^2, \\ m_4'' &= m_4' - 4m_3'm_1' + 6m_2'\left(m_1'\right)^2 - 3\left(m_1'\right)^3. \end{aligned} \qquad (18)$$

Вывод формул (18) предоставляем читателю самостоятельно.

Пример 12. Найти коэффициент асимметрии и эксцесс случайной величины, распределенной по так называемому закону Лапласа с функцией плотности $\varphi(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

Решение

Так как распределение случайной величины X симметрично относительно оси ординат, то все нечетные как начальные, так и центральные моменты равны 0, т.е. $m_1 = 0,\ m_3 = 0,\ m_3'' = 0$ и силу $A = \frac{m_3''}{\sigma^3}$ коэффициент асимметрии $A = 0$.

Для нахождения эксцесса необходимо вычислить четные начальные моменты m_2 и m_4:

$$m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\left(\frac{1}{2}e^{-|x|}\right)dx = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = 2.$$

Следовательно,

$$D(X) = m_2'' = m_2 - m_1^2 = 2 - 0^2 = 2 \text{ и } \sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2}.$$

$$m_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^4\left(\frac{1}{2}e^{-|x|}\right)dx = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^4e^{-x}dx = 24 \text{ и } m_4'' = 24.$$

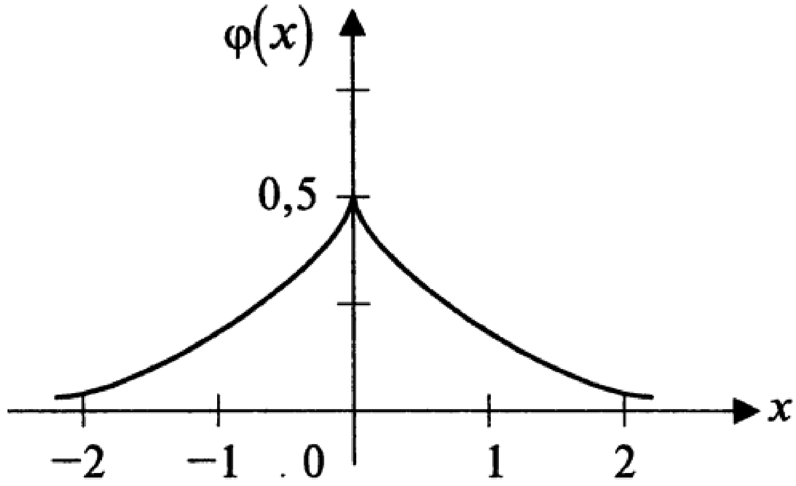

Рис. 3

Теперь вычислим эксцесс

$$E = \frac{m_4''}{\sigma^4} - 3 = \frac{24}{\left(\sqrt{2}\right)^4} - 3 = 3.$$

Эксцесс распределения положителен, что говорит об островершинности кривой распределения $\varphi(x)$ (рис. 3).

Для пары дискретных случайных величин X, Y рассмотрим следующие суммы:

$$m_{kl} = \sum x_i^k y_j^l p_{ij},\ \ m'_{kl} = \sum \left(x_i - a\right)^k \left(y_j - b\right)^l p_{ij},$$
$$m''_{kl} = \sum \left(x_i - M\left(X\right)\right)^k \left(y_j - M\left(Y\right)\right)^l p_{ij},\ \ \left(k,l = 0,1,2,....\right). \tag{19}$$

Они имеют следующие названия: m_{kl}- *начальный момент* порядка k,l; m'_{kl}- *относительный момент* порядка k,l (относительно чисел a и b); m''_{kl}- *центральный момент* порядка $k,l.$

При $k = 0$ или $l = 0$ моменты пары превращаются в моменты случайных величин.

Коэффициент ковариации, как видно из сравнения формул (19) и (15), совпадает с m''_{11} математическое ожидание произведения XY равно m_{11}.

Моменты пары $\left(X,Y\right)$ можно истолковать как математические ожидания некоторых функций от случайных величин X,Y, а именно:

$$m_{kl} = M\left(X^k Y^l\right),\ \ m'_{kl} = M\left(\left(X-a\right)^k \left(Y-b\right)^l\right)$$

$$m''_{kl} = \sum \left(X - M\left(X\right)\right)^k \left(Y - M\left(Y\right)\right)^l p_{ij},\ \ \left(k,l = 0,1,2,....\right).$$

Эти формулы определяют моменты не только для дискретных, но и для непрерывных величин.

Можно написать формулы, дающие явное выражение моментов через функции совместного распределения пары случайных величин. Написания этих формул предоставляем читателю.

Многие важные характеристики пары случайных величин X и Y достаточно просто выражаются через моменты этой пары величины.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется случайной величиной?
2. Приведите примеры случайных величин.
3. Какие бывают случайные величины?
4. Что представляют возможные значения: а) дискретной случайной величины?; б) непрерывной случайной величины?
5. Что называется законом распределения случайной величины?
6. Что называется рядом распределения дискретной случайной величины?
7. Что называется функцией распределения непрерывной случайной величины? Приведите свойства функции распределения.
8. Что называется функцией плотности распределения непрерывной случайной величины? Приведите свойства функции плотности распределения.
9. Что представляет собой биномиальное распределение?
10. Что представляет собой пуассоновское распределение?
11. Что называется равномерный закон распределения?
12. Что называется нормальный закон распределения?
13. Что называется показательный (экспоненциальный) закон распределения?
14. Разъясните необходимость введения числовых характеристик для случайных величин.
15. Дайте определение понятия математического ожидания.
16. Какой вероятностный смысл имеет математическое ожидание?
17. Дайте определение дисперсии.
18. Какой вероятностный смысл имеет дисперсия?
19. Что называется среднеквадратичным отклонением?
20. Приведите свойства математического ожидания и прокомментируйте их.
21. Приведите свойства математической дисперсии и прокомментируйте их.

22. Приведите свойства среднеквадратического отклонения и прокомментируйте их.

23. Что представляет собой коэффициент корреляции?

24. Приведите свойства коэффициента корреляции и прокомментируйте их.

25. Что называют: начальным моментом k-го порядка, относительным моментом k-го порядка, центральным моментом?

26. Что называют: начальным моментом порядка k,l; относительным моментом порядка k,l; центральным моментом порядка k,l?